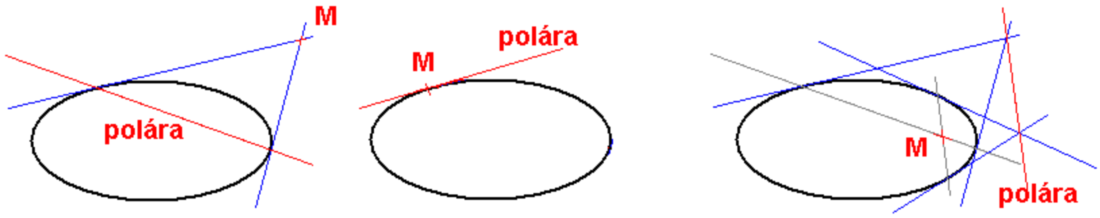
# 17 Kuželosečky a přímky

## *17.1 Poznámka:* *Polára bodu M ke kuželosečce*




Nechť X = $[x_0,y_0]$ je bod. Zavedeme následující úpravy:

| | |
|---|---|
| $x^2$ | $x_0x$ |
| $y^2$ | $y_0y$ |
| $xy$ | $(x_0y + xy_0)/2$ |
| $x$ | $(x_0 + x)/2$ |
| $y$ | $(y_0 + y)/2$ |
| $(x – m)^2$ | $(x_0 – m)(x – m)$ |
| $(y – n)^2$ | $(y_0 – n)(y – n)$ |

## **17.2 Definice:** poláry

Nechť X = $[x_0,y_0]$ je libovolný bod roviny různý od středu kuželosečky. Nechť $\varphi$: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ je obecná rovnice kuželosečky $\varphi$. Přímka
p: $Axx_0 + Byy_0 + C(x+x_0)/2 + D(y+y_0)/2 + E = 0$ se nazývá polára bodu X ke kuželosečce $\varphi$.

## **17.3 Věta:** polára $\cong$ tečna

Za předpokladu, že X leží na kuželosečce $\varphi$, je polára p bodu X ke kuželosečce $\varphi$ tečnou a bod X je bod dotyku.

## **17.4 Příklad:**

Napište rovnici tečny paraboly $\pi$: $y^2 = 3x$ , kde bodem dotyku je bod T = $[x_0,6]$.

Řešení: $T \in \pi$ => $36 = 3x_0$ $x_0 = 12$

T = [12,6] => t: $6y = 3/2\ (x + 12)$

t: $x – 4y + 12 = 0$

## **17.5 Příklad:**

Napište rovnici tečny ke kružnici k se středem S = [2,-1] a poloměrem r = 5, je-li bod dotyku T = $[6, y_0]$

Řešení: k: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

$T \in k$ => $16 + (y_0 + 1)^2 = 25$

=> $y_{01} = 2$, $y_{02} = -4$

jsou dva různé body dotyku

$T_1 = [6,2]$ $t_1$: $4(x-2) + 3(y+1) = 25$ $t_1$: $4x + 3y – 30 = 0$

$T_2 = [6,-4]$ $t_2$: $4(x-2) - 3(y+1) = 25$ $t_2$: $4x - 3y – 36 = 0$

## 17.6 Příklad:

Je dána parabola $\pi$: $y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$. Určete souřadnice vrcholu, ohniska a rovnice osy a řídící přímky. Dále napište rovnici tečny k parabole v dotykovém bodě
$T = [-2, y_0]$.

Řešení: $\pi$: $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$ => $V = [-2,-3]$, $p=2$, $F = [-1,-3]$
$o_\pi$: $y = -3$, d: $x = -3$

$T \in \pi$ => $y_0 = -3$
t: $x = -2$

## 17.7 Příklad:

Napište rovnice tečen kružnice k: $x^2 + y^2 = 13$, které se jí dotýkají v jejích průsečících s přímkou p: $x - 5y + 13 = 0$. Vypočítejte odchylku těchto tečen.

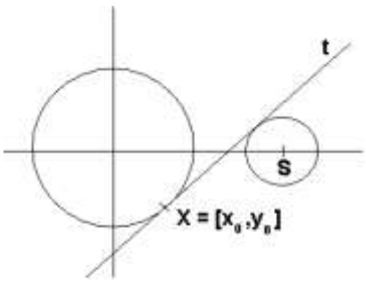
Řešení: řešíme soustavu $x=5y-13$ => $(5y-13)^2 + y^2 = 13$
$y^2 - 5y + 6 = 0$
$(y - 2)(y - 3) = 0$ $y_1 = 2$, $y_2 = 3$

$X_1 = [-3,2]$ $t_1$: $2x + 3y - 13 = 0$
$X_2 = [2,3]$ $t_2$: $-3x + 2y - 13 = 0$
$t_1 \perp t_2$ => $90^o$

## 17.8 Příklad:

Jsou dány kružnice $k_1$: $x^2 + y^2 = 16$, $k_2$: $(x - 8)^2 + y^2 = 4$. Napište rovnice společných tečen.

Řešení:




$S = [8, 0]$ $r = 2$

t: $x_0x + y_0y - 16 = 0$
a musí platit $|St| = 2$

$$2 = \frac{|x_0 8 + y_0 0 - 16|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$X \in k_1$ $x_0^2 + y_0^2 = 16$

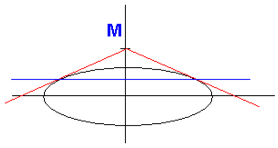
=> $|8x_0 - 16| = 8$
$|x_0 - 2| = 1$ $x_{01} = 3$ => $y_0^2 = 16 - 3^2 = 7$ $y_0 = \pm\sqrt{7}$
$x_{02} = 1$ => $y_0^2 = 16 - 1^2 = 15$ $y_0 = \pm\sqrt{15}$

čtyři dotykové body => čtyři tečny
$X_1 = [3,\sqrt{7}]$ $t_1$: $3x + \sqrt{7}\,y - 16 = 0$
$X_2 = [3,-\sqrt{7}]$ $t_1$: $3x - \sqrt{7}\,y - 16 = 0$
$X_3 = [1,\sqrt{15}]$ $t_1$: $x + \sqrt{15}\,y - 16 = 0$
$X_4 = [1,-\sqrt{15}]$ $t_1$: $x - \sqrt{15}\,y - 16 = 0$

## 17.9 Příklad:

Napište rovnice tečen ke kuželosečce $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, které procházejí bodem $M = [0,4]$

Řešení:




polára bodu M : $4.0x + 9.4y – 36 = 0$

$y - 1 = 0$

protíná elipsu ve dvou bodech - řešení soustavy rovnic

$y – 1 = 0$ a $4x^2 + 9y^2 – 36 = 0$

$y = 1 \Rightarrow 4x^2 = 36 – 9 \Rightarrow x^2 = 27/4 \Rightarrow x = \pm 3/2.\sqrt{3}$

bod dotyku $T_1 = [-3/2\,\sqrt{3},1]$ tečna $t_1$: $4.(-3/2\,\sqrt{3})x + 9y – 36 = 0$

$-2\sqrt{3}\,x + 3y – 13 = 0$

bod dotyku $T_2 = [3/2\,\sqrt{3},1]$ tečna $t_2$: $2\sqrt{3}\,x + 3y – 13 = 0$

## 17.10 Poznámka: Vnitřní a vnější body kuželoseček

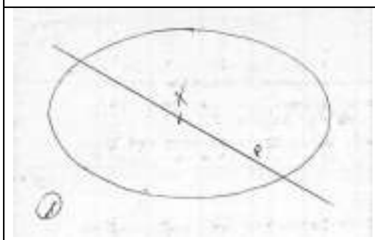
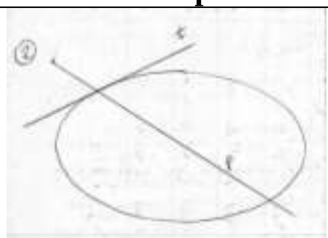
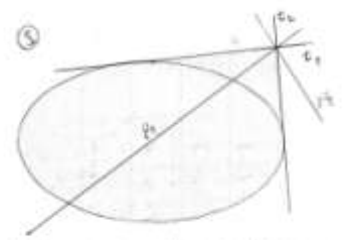
Křivka kuželosečky dělí rovina na části. Body ležící na křivce jsou body kuželosečky. Body které leží ve stejné části jako některé ohnisko, jsou body vnitřní. Ostatní body jsou vnější.

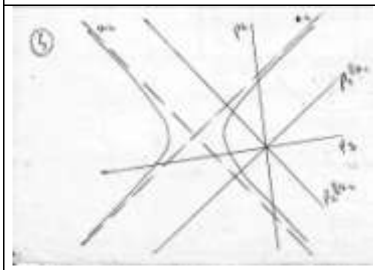
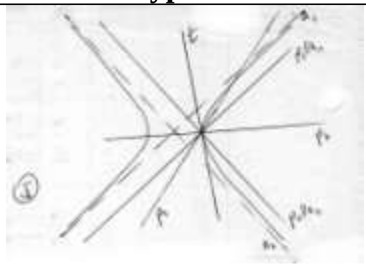
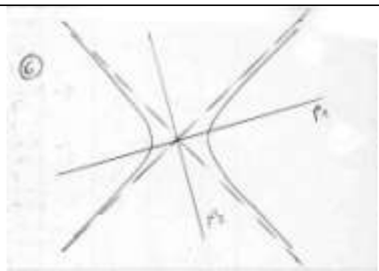
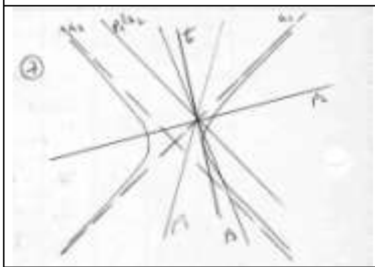
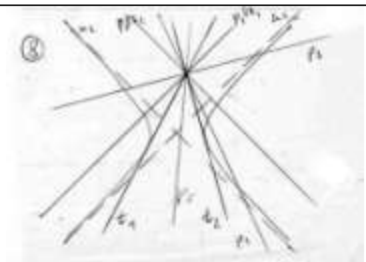
## 17.11 Příklad:

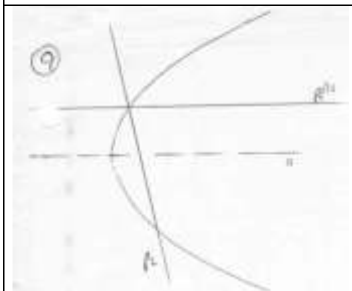
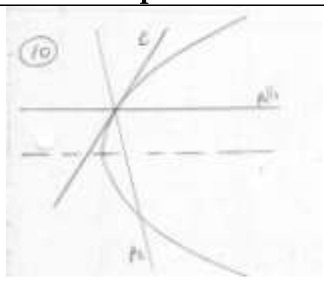
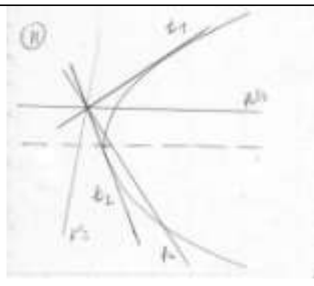
Určete zda dále uvedené body jsou vnitřní, vnější či body kuželosečky.

| | P = [0,0] | A = [-2, 2] | B = [2,-2] | C = [0,1] |
|---|---|---|---|---|
| $(x-4)^2+(y+3)^2=16$ | vnější | vnější | vnitřní | na kružnici |
| $(y+3)^2=4(x+2)$ | vnější | vnější | | |
| $-\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$ | vnitřní | | | |
| $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{9}=1$ | vnitřní | | | vnitřní |

## 17.12 Poznámka: Přehled

| **elipsa** | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| obr 1.<br>Vnitřním bodem elipsy lze vést vždy jen sečny mající s elipsou 2 společné body. | obr 2.<br>Bodem na elipse lze vést vždy **jedinou** tečnu t a sečny p. | obr 3.<br>Vnějším bodem elipsy lze vést vždy **dvě** tečny $t_1$, $t_2$ nebo sečny $p_1$ anebo nesečny nemající s elipsou žádný společný bod $p_2$. |

| hyperbola | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| obr 4.<br>Vnitřním bodem hyperboly lze vést sečnu mající s hyperbolou **jeden** společný bod ($p_1$, $p_2$ – rovnoběžky s asymptotami) nebo **dva** společné body ($p_3$ – na každé větvi jeden, $p_4$ – oba body na stejné větvi). | obr 5.<br>Bodem na hyperbole lze vést vždy **jednu** tečnu t nebo sečnu všech typů ($p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$) | obr 6.<br>Středem hyperboly procházejí dvě asymptoty $a_1$, $a_2$ nemající s hyperbolou žádný společný bod nebo sečny se dvěma společnými body $p_1$ anebo nesečny nemající žádný společný bod $p_2$. |
|  |  | |
| obr 7.<br>Bodem ležícím na jedné asymptotě lze vést vždy **jedinou** tečnu t nebo sečny $p_1$, $p_2$, $p_3$ anebo nesečny $p_4$. | obr 8.<br>Vnějším bodem hyperboly, který přitom neleží na hyperbole lze vést vždy **dvě** tečny $t_1$, $t_2$ nebo sečny všech typů $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ anebo nesečny $p_5$. | |

| parabola | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| obr 9.<br>Vnitřním bodem paraboly lze vést vždy jen sečnu buď mající s parabolou **jeden** společný bod ($p_1$ – rovnoběžka s osou paraboly) nebo **dva** společné body $p_2$. | obr 10.<br>Bodem na parabole lze vést vždy **jednu** tečnu t nebo sečny jednoho z typů $p_1$, $p_2$. | obr 11.<br>Vnějším bodem paraboly lze vést vždy **dvě** tečny $t_1$, $t_2$ nebo sečny jednoho z typů $p_1$, $p_2$ anebo sečny typu $p_3$. |

Žádná jiná možnost vzájemné polohy přímky a kuželosečky, než je uvedena v přehledu, není!

Každá kuželosečka rozdělí rovinu na tři části:

1. body, které leží na kuželosečce,
2. body, které leží ve stejné části jako ohnisko (ohniska) – nazývají se vnitřní,
3. ostatní body – nazývají se vnější.

Ze souřadnic poznáme, zda vod X je vnitřní, vnější jen pomocí rovnice (vzorce) v základním tvaru. Je-li kuželosečka v jiném než základním tvaru, musíme ji nejdříve do tohoto tvaru převést.

## 17.11 Poznámka: Svazek přímek

– p je parametr svazku přímek

svazek rovnoběžných přímek $ax + by + p = 0$

svazek přímek určených bodem $S = [x_0, y_0]$ $y - y_0 = p\,(x - x_0)$

parametrickou rovnici nutno doplnit ještě o rovnoběžku s osou y $x = x_0$

## 17.12 Příklad:

Napište rovnice přímek, které mají s parabolou $\pi$: $y^2 = 4x$ právě jeden společný bod a procházejí bodem

1. $R = [3,1]$
2. $Q = [0,3]$

Určete pro jaké hodnoty směrnice jsou přímky svazku sečnou, tečnou, nesečnou paraboly.

Řešení:

1. bod R je vnitřním bodem – k vnitřnímu bodu paraboly existuje přímka s jedním společným bodem, která je sečnou a je rovnoběžná s osou paraboly, tedy

   p: $y = 1$

   svazek p: $(y - 1) = k\,(x - 3)$ - všechny přímky jsou sečny , $k \in R$

2. bod Q je vnějším bodem, tedy existují právě dvě tečny – které dostaneme řešením soustavy

$$y^2 = 4x \qquad (kx+3)^2 - 4x = 0$$
$$y - 3 = kx \qquad k^2x^2 + 2x(3k-2) + 9 = 0$$

jeden společný bod buď není kvadratická $k = 0$ s: $y - 3 = 0$ sečna

nebo je diskriminant roven nule

$D/4 = (3k-2)^2 - 9k^2 = -12k + 4 = 0 \Rightarrow k = 1/3$

p: $y = 1/3\, x + 3$

ale tečny musí být dvě => druhá je rovnoběžná s osou y q: $x = 0$

Hledané přímky s jedním společným bodem jsou tři p,q,s.

| směrnice svazku k | |
|---|---|
| $(-\infty, 1/3)$ | sečna |
| 1/3 | tečna |
| $(1/3, +\infty$ | nesečna |

## 17.13 Příklad:

Napište rovnice tečen k hyperbole $x^2/4 - y^2/9 = 1$, které jsou kolmé k přímce p: $x + 2y + 29 = 0$.

Řešení: rovnice svazku přímek $\perp$ k přímce p je q: $2x - y + c = 0$

soustava $9x^2 - 4y^2 = 36$

$y = 2x + c$

$9x^2 - 4(2x + c)^2 - 36 = 0$ $\quad 7x^2 + 16cx + 4c^2 + 36 = 0$

jeden společný bod $D/4 = 8^2c^2 - 7(4c^2+36) = 36(c^2-7) = 0$ $\quad c = \pm\sqrt{7}$

$t_1$: $2x - y + \sqrt{7} = 0$ $\quad t_2$: $2x - y - \sqrt{7} = 0$

| parametr svazku c | |
|---|---|
| $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$ | sečna |
| $\pm\sqrt{7}$ | tečna |
| $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ | nesečna |

## 17.14 Příklad:

Určete pro kterou hodnotu směrnice je přímka procházející bodem A = [2,0] tečnou, sečnou, nesečnou k elipse ε: $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$

Řešení: $\varepsilon([0,0]) = 5.0^2 + 9.0^2 - 45 < 0$

$\varepsilon([2,0]) = 5.2^2 + 9.0^2 - 45 < 0$ $\quad$ => $\quad$ A je vnitřní bod

všechny přímky svazku určeného bodem A $\quad y = k(x - 2)$

jsou pro každé k sečnami.

## 17.15 Příklad:

Určete pro kterou hodnotu směrnice je přímka procházející bodem B = [2,5/3] tečnou, sečnou, nesečnou k elipse ε: $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$

Řešení: $\varepsilon([0,0]) = 5.0^2 + 9.0^2 - 45 < 0$

$\varepsilon([2,5/3]) = 5.4 + 9.25/9 - 45 = 0$ $\quad$ => $\quad$ B je bod na elipse

jedna přímka svazku $y = k(x - 2) + 5/3$ bude tečna, ostatní budou sečny

tečna = polára bodu B $\quad 5.2x + 9.\ 5/3y - 45 = 0$

po úpravě $\quad 2x + 3y - 9 = 0$ $\quad$ tj. pro směrnici $k = -2/3$ je tečna

| parametr svazku k | |
|---|---|
| $(-\infty, -2/3) \cup (-2/3, +\infty)$ | sečna |
| -2/3 | tečna |

## 17.16 Příklad:

Určete pro kterou hodnotu směrnice je přímka procházející bodem C = [0,-3] tečnou, sečnou, nesečnou k elipse ε: $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$

Řešení: $\varepsilon([0,0]) = 5.0^2 + 9.0^2 - 45 < 0$

$\varepsilon([0,-3]) = 5.0^2 + 9.(-3)^2 - 45 > 0$ $\quad$ => $\quad$ C je bod vnější bod – všechny případy svazek určený bodem C $\quad y = kx - 3$

řešíme soustavu dosazením

$$5x^2 + 9(kx - 3)^2 - 45 = 0$$

po úpravě

$$(5 + 9k^2)\, x^2 - 2.27\, kx + 36 = 0$$

jde vždy o kvadratickou rovnici v x, proto vše rozhoduje pouze diskriminant

$D = 4.27^2k^2 - 4.36(5 + 9k^2) = 4(27^2k^2 - 36(5 + 9k^2)) = 4.45\, (9k^2 - 4)$

| parametr svazku k | |
|---|---|
| $(-\infty, -2/3) \cup (2/3, +\infty)$ | sečna |
| $\pm 2/3$ | tečna |
| $(-2/3, 2/3)$ | nesečna |

## 17.17 Příklad:

Určete pro kterou hodnotu směrnice je přímka procházející bodem D = [-1,0] tečnou, sečnou, nesečnou k parabole $\pi$: $y^2 - 8x = 0$

Řešení: Bod D je evidentně vnějším bodem paraboly – řešíme soustavu

$$y^2 - 8x = 0$$

a svazku

$$y = k(x+1)$$

$$(kx + k)^2 - 8x = 0$$

po úpravě

$$k^2x^2 + 2(k^2 - 4)x + k^2 = 0$$

I. pro $k^2 = 0$ není kvadratická rovnice => pro k = 0 je sečna s jedním bodem

II. pro $k^2 \neq 0$ je kvadratická a řeší se přes diskriminant

$$D = 4\,(k^2 - 4)^2 - 4\,k^2 = 32\,(2 - k^2)$$

$D = 0 \iff |k| = \sqrt{2}$ tečny
$D > 0 \iff |k| > \sqrt{2}$ sečny
$D < 0 \iff |k| < \sqrt{2}$ nesečny

| parametr svazku k | |
|---|---|
| $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ | nesečny |
| $\pm \sqrt{2}$ | tečny |
| $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$<br>z toho pro 0 | sečny<br>sečna s jedním bodem |

## 17.18 Příklad:

Pro jaká c jsou přímky svazku p: $2x - y + c = 0$ tečnou, sečnou, nesečnou k hyperbole $\delta$: $x^2 - y^2 = 25$

Řešení: po dosazení a úpravě $3x^2 + 4cx + c^2 + 25 = 0$

jde vždy o kvadratickou rovnici => diskriminant $D = 4\,(c^2 - 75)$

| parametr svazku c | |
|---|---|
| $(-\infty, -5\sqrt{3}) \cup (5\sqrt{3}, +\infty)$ | sečny |
| $\pm 5\sqrt{3}$ | tečny |
| $(-5\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$ | nesečny |

KONEC