# 13 Analytická geometrie v prostoru

Nyní se zaměříme na třídimenzionální prostor $\pi_3$ a využijeme vlastností, které zde platí – pozor v rovině $\pi_2$ neplatí.

## 13.1 **Poznámka:** Opakování

$\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$ , $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ - vektory

skalární součin vektorů $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

velikost vektoru $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

vektorový součin $\vec{a}\ x\ \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

$A = [a_1,a_2,a_3]$, $B = [b_1,b_2,b_3]$ - body

$\mathbf{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

vzdálenost bodů $|AB| = \|\mathbf{AB}\| = \sqrt{((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)}$

parametrické rovnice přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$, $\mathbf{u}$ – směrový vektor

$$p: \quad \begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \qquad t \in R \\ z &= a_3 + tu_3 \end{aligned}$$

parametrické rovnice roviny $\rho = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ – zaměření roviny

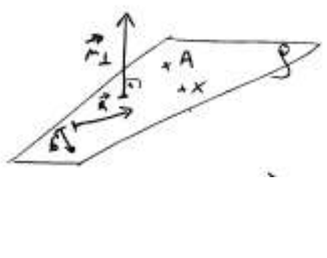
$$\rho: \begin{aligned} x &= a_1 + r\,u_1 + s\,v_1 \\ y &= a_2 + r\,u_2 + s\,v_2 \qquad r,s \in R \\ z &= a_3 + r\,u_3 + s\,v_3 \end{aligned}$$

## 13.2 Poznámka: **Obecná rovnice přímky**

Protože v prostoru neexistuje jednoznačně kolmý směr ke směrovému vektoru přímky, neexistuje v prostoru obecná rovnice přímky.

## 13.3 Poznámka: **Obecná rovnice roviny**

V prostoru existuje k rovině jednoznačně kolmý směr



$\rho = \{A, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = \{A, \mathbf{u}_\perp\}$ - $\mathbf{u}_\perp$ normálový vektor roviny

$X \in \rho \Leftrightarrow \mathbf{AX} \perp \mathbf{u}_\perp \Leftrightarrow \mathbf{AX}.\mathbf{u}_\perp = 0$

$A = [a_1,a_2,a_3]$, $B = [x,y,z]$ $\mathbf{u}_\perp = (a,b,c)$

$\mathbf{AB} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$

$$\mathbf{AX}.\mathbf{u}_\perp = 0$$

$$(x - a_1)\, a + (y - a_2)\, b + (z - a_3)\, c = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad - \qquad \text{obecná rovnice}$$

Obecná rovnice je jednoznačná až na násobek.

Ilustrace $A = [3, -1, 2]$ , $\mathbf{u}_\perp = (1, 3, 2)$ $\qquad x + 3y + 2z - 4 = 0$

## 13.4 Poznámka: převody

Přechod mezi rovnicí obecnou a parametrickými pro rovinu

1)

$\rho$: $x = 3 + t + m$ $\qquad A = [3, -1, 0]$

$y = -1 + 3t - m$ $\qquad \mathbf{t} = (1, 3, -1)$

$z = -t + 2m$ $\qquad m = (1, -1, 2)$

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{t} \times \mathbf{m} = (5, -3, -4)$$

$$\rho: 5x - 3y - 4z - 18 = 0$$

2)

$\rho$: $x - y + 2z - 1 = 0$ $\qquad$ 1 rovnice pro 3 neznámé, dvě volíme (doporučuji 0 nebo 1) třetí vypočteme

$\Rightarrow \qquad B = [1,0,0]$

vektory zaměření roviny jsou oba kolmé na vektor normálový, ale nesmějí být jeden násobkem druhého a nesmějí být nulové

$\rho_\perp = (1, -1, 2)$ $\qquad$ hledáme vektor $\qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

a musí platit $\qquad \rho_\perp.\mathbf{u} = 0$ $\qquad$ tj. $\qquad u_1 - u_2 + 2u_3 = 0$

jedna rovnice pro tře neznámé, dvě volím, třetí vypočtu (doporučuji střídat 0 a 1)

volím $u = (1, \ldots, 0)$ $\qquad$ vypočtu $u = (1, -1, 0)$

volím $v = (\ldots, 1, 0)$ $\qquad$ vypočtu $v = (-1, 1, 0)$ špatně $v = -u$

volím $w = (0, \ldots, 1)$ $\qquad$ vypočtu $w = (0, 2, 1)$

$\rho$: $x = 1 + s$

$y = -s + 2r$

$z = r$

## 13.5 Příklad:

Určete vzájemnou polohu dvojic rovin a určete průsečnice.

a) $\rho$: $6x+7y+z-2=0$ a $\sigma$: $x+y-z=0$

b) $\rho$: $x+y-2z-1=0$ a $\sigma$: $x=2+t+s$, $y=-1+t-3s$, $z=0+t-s$

c) $\rho$: $x+y-4z+6=0$ a $\sigma$: $2x+2y-8z+12=0$

d) $\rho$: $y-z-3=0$ a $\sigma$: $2x+3y+z-1=0$

Řešení:

a)

$\rho$: 6x+7y+z-2=0 $\rho_\perp = (6,7,1)$

$\sigma$: x+y-z=0 $\sigma_\perp = (1,1,-1)$

$\mathbf{u} = \rho_\perp \times \sigma_\perp = (8,7,-1)$

normálové vektory nejsou evidentně jeden násobkem druhého, tedy roviny nejsou rovnoběžné

průsečnice má směrový vektor **u** ; pro napsání rovnic průsečnice potřebujeme ještě bod = společný bod obou rovin = musí vyhovovat oběma rovnicím rovin = 2 rovnice pro 3 neznámé jednu volím dvě vypočtu – volím y = 0

$$6x+7y+z-2=0$$
$$x+y-z=0 \quad \Rightarrow \quad z = x = 2/7$$

$$\rho \cap \sigma : x = 2/7 - 8t,\ y = 7t,\ z = 2/7 - t$$

b)

$\rho$: x+y-2z-1=0 $\rho_\perp = (1,-1,2)$

$\sigma$: x=2+t+s, y=-1+t-3s, z=0+t-s $\sigma_\perp = (1,1,1) \times (1,-3,-1) = (2,2,-4) \sim (1,1,-2)$

$\mathbf{2}\rho_\perp = \sigma_\perp$ => jsou rovnoběžné nebo totožné

$B \in \sigma$ ověříme v druhé rovnici

$\rho(B) = 0 - 0 + 4 - 1 \neq 0$ $B \notin \rho$ => jsou různé

c)

$\rho$: x+y-4z+6=0 jedna rovnice je násobkem druhé

$\sigma$: 2x+2y-8z+12=0 => $\rho = \sigma$

d)

$\rho$: y-z-3=0 $\rho_\perp = (0,1,-1)$

$\sigma$: 2x+3y+z-1=0 $\sigma_\perp = (2,3,1)$

společný bod A = [2,0,-3] $\mathbf{u} = \rho_\perp \times \sigma_\perp = (4,-2,-2) \sim (2,-1,-1)$

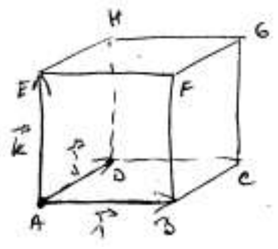
$$\rho \cap \sigma : x = 2 - 2t,\ y = -t,\ z = -3 - t$$

## 13.6 Příklad:

Je dána krychle. Určete odchylku tělesové úhlopříčky od

a) hrany krychle
b) stěny krychle
c) od jiné tělesové úhlopříčky

Řešení:




vezmeme jednotkovou krychli a zavedeme souřadný systém

A = [0,0,0] E = [0,0,1]
B = [1,0,0] F = [1,0,1]
C = [1,1,0] G = [1,1,1]
D = [0,1,0] H = [0,1,1]

Vezmeme si tělesovou úhlopříčku **AG** = (1,1,1)   ||**AG**|| = √3

a) odchylka od hrany **AB** = (1,0,0)   ||**AB**|| = 1

cos α = √3 / 3   =>   α = 54°44’

b) odchylka od stěny ABCD , **AC** = (1,1,0)   ||**AC**|| = √2

cos β = √6 / 3   =>   β = 35°16’

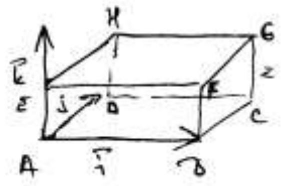
c) odchylka s úhlopříčkou   BH = (-1,1,1)  ||BH|| = √3

cos γ = 1/3   =>   γ = 70°32’

## 13.7 Příklad:

Jak volit výšku kvádru čtvercové jednotkové podstavy, aby tělesové úhlopříčky byly na sebe kolmé?

Řešení:



A = [0,0,0]
B = [1,0,0]
G = [1,1,z]
H = [0,1,z]

**AG** = (1,1,z)
**BH** = (-1,1,z)

**AG** ⊥ **BH**   ⇔   **AG**.**BH** = 0

$x^2 = 0$

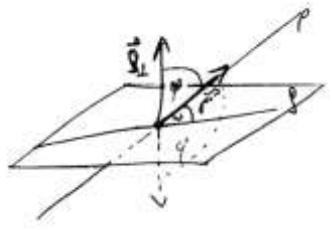
$x = 0$

Žádný kvádr se čtvercovou podstavou nemůže mít tělesové úhlopříčky na sebe kolmé.

## 13.8 Příklad:

Body A=[2,-1,1], B=[4,-3,-9], C=[3,-2,4], D=[14,11,-5] jsou vrcholy čtyřstěnu. Určete odchylku hrany AD od stěny ABC.

Řešení:



$\omega \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$

$\omega = 90^\circ - \varphi$

$$\cos\varphi = \cos(90^\circ - \omega) = \sin\omega = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{\rho_\perp}|}{\|\vec{p}\| \|\vec{\rho_\perp}\|}$$

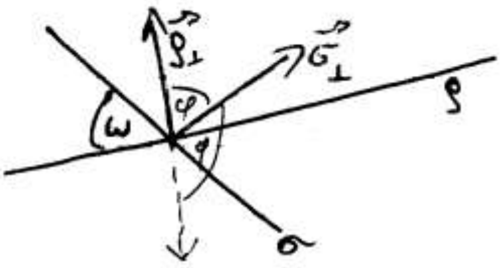
**AD** = (12,12,-6) ~ (2,2,-1) = **a**  ||**a**|| = 3
**AB** = (2,-2,-10) ~ (1,-1,-5)
**AC** = (1,-1, 3)   ~ (1,-1, 3)
**AB** x **AC** = (-8,-8,0) ~ (1,1,0) = **b**   ||**b**|| = √2

$$sin\omega = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \omega = 70°32'$$

## 13.9 **Příklad:** odchylka stěn

Určete odchylku stěn ABC, ABD ve čtyřstěnu z příkladu 13.8.

Řešení:



$\omega \in \langle 0^o, 90^o \rangle$

$\omega = 90^o - \varphi$

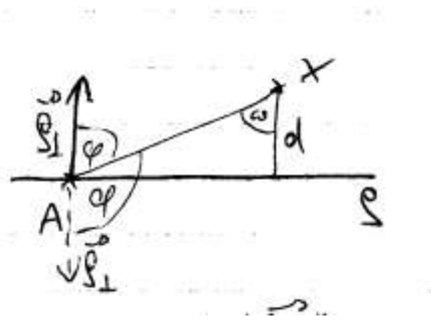
$$cos\varphi = cos\omega = \frac{|\vec{p}.\overrightarrow{\rho_\perp}|}{\|\vec{p}\|\|\overrightarrow{\rho_\perp}\|}$$

**b** = (1,1,0)   normálový vektor stěny ABC

**AD** ~ (2,2,-1)
**AB** ~ (1,-1,-5)
**c** = **AB** x **AD** = (-11,9,-4)      ||c|| = √(121 + 81 + 16) = √218

$$cos\omega = \frac{|-2|}{\sqrt{2}\sqrt{218}} = \frac{2}{2\sqrt{109}} = \frac{\sqrt{109}}{109} \quad \Rightarrow \quad \omega = 84°30'$$

## 13.10 **Poznámka:** Vzdálenost bodu od roviny



cos ω = |cos φ|

d = ||**AX**|| cos ω = ||**AX**|| |cos φ| =

$$= \frac{\|\rho_\perp\|\|AX\||cos\varphi|}{\|\rho_\perp\|} = \frac{|\rho_\perp.AX|}{\|\rho_\perp\|}$$

ρ: ax + by + cz + d = 0,
A je libovolný bod roviny, třeba A = $[a_1,a_2,a_3]$  => $aa_1 + ba_2 + ca_3 = - d$
daný bod X = $[x_o,y_o,z_o]$ => **AX** = $(x_0-a_1,y_0-a_2,z_0-a_3)$
dosadíme a upravíme, dostaneme

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## 13.11 Příklad:

Určete vzdálenost bodu M = [2,3,-1] od roviny σ: 5x + 4y - 7z - 1=0
a od roviny τ: x = r + s, y = 1 – r + s, z = -1 + s

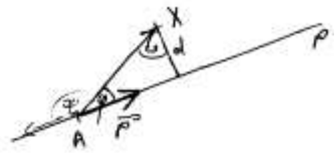
Řešení:

$$|M,\sigma| = \frac{|5.2 + 4.3 - 7.(-1) - 1|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{28}{\sqrt{90}} = \frac{14\sqrt{10}}{15}$$

τ = {[0,1,-1], (1,-1,0), (1,1,1)} => x + y – 2z – 3 = 0

$$|M,\tau| = \frac{|1.2 + 1.3 - 2.(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

## 13.12 Poznámka: Vzdálenost bodu od přímky

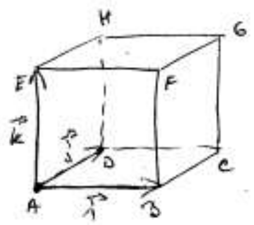



cos ω = cos (90°-φ) = cos (φ-90°)=sin φ

d = ||**AX**|| cos ω = ||**AX**|| sin φ $= \dfrac{\|\vec{p}\|\|\overrightarrow{AX}\| \sin\varphi}{\|\vec{p}\|} = \dfrac{\|\vec{p} \times \overrightarrow{AX}\|}{\|\vec{p}\|}$

## 13.13 Příklad:

Určete vzdálenost vrcholu A od roviny BDE a od úhlopříčky v jednotkové krychli ABCDEFGH.
Řešení:




**BD** = (-1,1,0)
**BE** = (-1,0,1)
**BD** x **BE** = (1,1,1) normálový vektor BDE : x + y + z – 1 = 0

|A,BDE| = 1/√3 = √3 / 3

BH = {B=[1,0,0], **BH**}
**BH** = (-1,1,1)
**AB** = (1,0,0) **BH** x **AB** = (0,1,-1) |A,BH| = √2 / √ 3 = √6 / 3

## 13.14 **Příklad:** vzdálenost rovnoběžných rovin

Odvoďte vzorec pro vzdálenost dvou rovnoběžných rovin
$\rho$: $ax + by + cz + d_1 = 0$
$\sigma$: $ax + by + cz + d_2 = 0$

Řešení:
$A = [a_1,a_2,a_3] \in \rho \Rightarrow aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1 = 0$
$B = [b_1,b_2,b_3] \in \sigma \Rightarrow ab_1 + bb_2 + cb_3 + d_2 = 0$
**u** = (a,b,c) normálový vektor obou rovin

$$|\rho,\sigma| = |A,\sigma| = \frac{|\vec{u}.\overrightarrow{AB}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|d_1 - d_2|}{\|\vec{u}\|}$$

**AB** = $(b_1–a_1, b_2-a_2 , b_3-a_3)$
**AB.u** = $a(b_1–a_1) + b(b_2-a_2) + c(b_3-a_3) = d2 – d1$

nebo dosazením do vzorce pro vzdálenost bodu A od roviny $\sigma$

$$|\rho,\sigma| = |A,\sigma| = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-d_1 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## 13.15 **Příklad:**

Vypočtěte objem krychle, jejíž dvě stěny leží v rovinách
$3x – 2y + 6z – 10 = 0$,  $3x – 2y + 6z + 4 = 0$

Řešení:
rovnice jsou rovnoběžné => $a = |-10 - 4|/\sqrt{(9 + 4 + 36)} = 14/7 = 2$ => $V = 2^3 = 8$

## 13.16 **Poznámka:** Vzdálenost dvou mimoběžek

p = {A, **u**},  q = {B, **v**},  $\rho$ = {A, **u**, **v**}
rovina $\rho$ obsahuje přímku p, proto vzdálenost mimoběžek je rovna vzdálenosti bodu B od roviny $\rho$

normálový vektor roviny $\rho$ je **u** x **v** dosadíme do vzorce 13.12

$$|p,q| = \frac{|\overrightarrow{AB}.(\vec{u}\ x\ \vec{v})|}{\|\vec{u}\ x\ \vec{v}\|}$$

## 13.17 **Příklad:**

Určete vzdálenost DF a BG v krychli ABCDEFGH

Řešení:
DF = p = {D = [0,1,0], **DF** = (1,-1,1)}

BG = q = {B = [1,0,0], **BG** = (0,1,1)}

DF x BG = (-2,-1,1)    ||**DF** x **BG**|| = √6

|p,q| = |2 – 1 + 0| / √6 = √6 / 6

## 13.18 Příklad:

Je dána rovina ρ: 3x – 4y + 8z – 24 = 0

a) Určete obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou A = $\rho \cap o_x$, B = $\rho \cap o_y$, D = $\rho \cap o_z$

b) Určete objem čtyřstěnu ABDE, jehož tři vrcholy jsou A,B,D a T = [3,2,-1] je jeho těžiště.

Řešení:

$o_x$: y = 0, z = 0    A = [8,0,0]

$o_y$: x = 0, z = 0    B = [0,-6,0]

$o_z$: x = 0, y = 0    D = [0,0,3]

**AD** = (-8, 0, 3)

**AB** = (-8, -6, 0)

**AD** x **AB** = (18,-24,48)

$S_{\Delta ABD}$ = ½ ||**AD** x **AB**|| = 3 √89

E = [t,u,v]    T = [3,2,-1] = ¼ ([8,0,0] + [0,-6,0] + [0,0,3] + [t,u,v])  =>  E = [4,14,-7]

objem čtyřstěnu ABDE je roven 1/6 objemu rovnoběžnostěnu ABCDEFGH

$V_{ABDE}$ = 1/6 (**AB** x **AD**).**AE** = 1/6 (-18,24,-48),(-4,14,-7) =

= ( -3,4,-8).(-4,14,-7) = 12 + 56 + 56 = 124

KONEC